



Faculty of Science

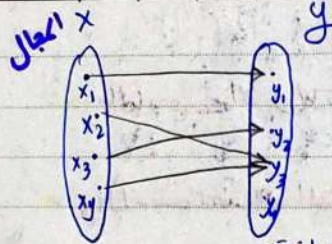
Subject: Mathematics

Sec: All

By: Mostafa Yasser

التفاضل

الجال المقابل



$$\begin{aligned} f(x_1) &= y_1 \\ f(x_2) &= y_3 \\ f(x_3) &= y_2 \\ f(x_4) &= y_3 \end{aligned}$$

دالة أحادية ← كل عنصرين مختلفين لهم صور مختلفة
 $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

دالة أفقية ← المجال المقابل = المدى Range

★ تناظر أحادي ← للدالة خواص أحادية و أفقية

★ تكون الدالة متصلة $f(x)$:- ① أن تكون الدالة معرفة عند $x=a$

② نهاية الدالة $f(x)$ موجودة عندما $x \rightarrow a$ بمعنى أن النهاية اليمنى = اليسرى

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \text{ أن يكون } \star$$

$$\star \sin(2x) = 1 \text{ at } (2x) = \pi/2$$

★ إلى اشتقاق المبروج ★

$$[f_1(x) \pm f_2(x)]' = f_1'(x) \pm f_2'(x)$$

① مشتقة مجموع دالتين

$$[f_1(x) \cdot f_2(x)]' = f_1'(x) \cdot f_2(x) + f_1(x) \cdot f_2'(x) \text{ حاصل ضرب } \textcircled{2}$$

$$\frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} = \frac{f_1'(x) \cdot f_2(x) - f_1(x) \cdot f_2'(x)}{f_2^2(x)}, f_2(x) \neq 0 \text{ مشتقة خارج قسمة } \textcircled{3}$$

④ تماثل دالة الدالة (قاعدة السلسلة) (Chain Rule)

$$\text{when } f(u) = y \text{ and } g(x) = u \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

(التي تبدأ بالمقطع Co اشتقاقها صالح)

⑤ مشتقات الدوال المثلثية

$f(x)$	$\frac{d}{dx} (f(x))$	$f(x)$	$\frac{d}{dx} (f(x))$
$\sin x$	$\cos x$	$\sec x$	$\sec x \tan x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\csc x$	$-\csc x \cot x$
$\tan x$	$\sec^2 x$	$\cot x$	$-\csc^2 x$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

بالحدس في الأول ← ★

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

وبالتالي العلاقة المتطابقة ← ★

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{2x+h}{2} \cdot \sin \frac{h}{2}}{h} = -2 \lim_{h \rightarrow 0} \sin \frac{2x+h}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$= -2 \sin x \cdot \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

دالة عكسية ←

معك ←

$$\star \sin^{-1} x \neq (\sin x)^{-1} \rightarrow = \frac{1}{\sin x}$$

$$\star \sin^{-2} x \rightarrow \text{ليست دالة عكسية}$$

$$\downarrow (\sin x)^{-2} \rightarrow -2 (\sin x)^{-3}$$

$$y = x^n \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y' = n x^{n-1} \quad [6]$$

7] تفاضل الجذر $\frac{1}{x}$ تفاضل ما تحت الجذر x

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{d}{dx} [C.] = 0 \rightarrow y = 2, y' = 0 \quad [8]$$

$$\frac{d}{dx} [f(x)^n] = n (f(x))^{n-1} \cdot f'(x) \quad [9]$$

$$[10] \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin nx}{x} = n - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan nx}{x} = n$$

المشتقة الأولى

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \frac{m}{n} \quad \text{حالة خاصة} \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} = \frac{m}{n} \cdot (a)^{m-n}$$

المشتقة الأولى

$$[11] y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

الدوال المثلثية العكسية

* $\sin \theta = 1 \rightarrow \theta = \sin^{-1} 1$ * $y' = \frac{1}{1+x^2}$ مشتقة الزاوية

الدالة	المشتقات
* $\sin^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos^{-1} x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
* $\tan^{-1} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\cot^{-1} x$	$\frac{-1}{1+x^2}$
* $\sec^{-1} x$	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{cosec}^{-1} x$	$\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

$$\dot{y} = \frac{1}{x} \rightarrow \ddot{y} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\star \frac{1}{0} = \infty$$

$$\boxed{\frac{0}{1} = 0}$$

$$\frac{\infty}{2} = \infty$$

$$\star \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\star \sec 0 = 1$$

$$\cdot \cos 0 = 1$$

$$\cdot \tan 0 = 0$$

$$\cdot \sin 0 = 0$$

$$\cdot \cot 0 = \infty$$

$$\cdot \operatorname{cosec} 0 = \infty$$

$$\cot = \frac{1}{\tan}$$

$$\tan$$

$$e \approx 2,71$$

★ الدالة الأسية :-

$y = a^x$ أساس ثابت $\rightarrow y = a^{f(x)} \rightarrow y' = a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \ln a$
 $y = e^x$ أساس طبيعي $\rightarrow y = e^{f(x)} \rightarrow y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

$$\ln e = 1$$

★ الدالة اللوغاريتمية :-

لوغاريتم طبيعي

$$y = \ln f(x) \rightarrow y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

أساس ثابت

$$y = \log_a f(x) \rightarrow y' = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot \frac{1}{\ln a}$$

$$y = \ln x \rightarrow y' = \frac{1}{x}$$

$$\log_b x^y = y \log_b x, \ln x^y = y \ln x$$

★ قواعد هامة :-

$$\log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y, \ln (x \cdot y) = \ln x + \ln y$$

$$\log_b \left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y, \ln \left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

$$y = \ln x \rightarrow y' = \frac{1}{x}$$

$$y = a^x \Rightarrow x = \log_a y$$

★ للتحويل من أسية لللوغاريتمية والعكس

★ المشتقات العليا (المشتقة النونية)

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) \rightarrow \text{ex. } y = e^{3x} \rightarrow y' = 3e^{3x} \rightarrow y'' = 3^2 e^{3x} \rightarrow y^{(n)} = 3^n e^{3x}$$

$$y = \sin x \rightarrow y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$y = \sin(ax) \rightarrow y^{(n)} = a^n \sin\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$y = \cos x \rightarrow y^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

* تطبیقات التفاضل *

1) قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow{\text{مرة اخرى}} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

بالحق ما يكون
الناتج عن التعويض مباشرة

((کمیت غیر معینہ)) ← $\frac{\infty}{\infty}$

2) مفكوك تيلور

2. مفروق تيلور $f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 12$$

3) مفكوك ما كلورين

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

$F(x) \xrightarrow{\text{تفاضل}} F'(x)$
 $F'(x) \xrightarrow{\text{یکامل}} F(x)$

التكامل

☆ القواعد الأساسية للتكامل :-

$$\boxed{1} \int a \, dx = a \int 1 \, dx = ax + c$$

$$\textcircled{2} \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

$$\boxed{3} \int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx \pm \dots$$

$$\boxed{4} \int [f(x)]^n \cdot f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\boxed{5} \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$$

$$\boxed{6} \int e^{f(x)} \cdot f'(x) dx = e^{f(x)} + C$$

$$\boxed{7} \int a^{f(x)} \cdot f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C$$

$$\star \int \frac{x^2}{x^2+1} dx = \int \left[1 - \frac{1}{x^2+1} \right] dx = x - \tan^{-1}x + C$$

$$\star \int \frac{x^2}{x^2+4} dx = \int \left[1 - \frac{4}{x^2+4} \right] dx = x - 4 \times \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{x}{2} + C$$

$$\boxed{8} \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + C$$

★ تكامل الدوال المثلثية :-

$$\boxed{1} \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\boxed{2} \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\boxed{3} \int \sec^2 x dx = \tan x + C \quad \int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + C$$

$$\boxed{4} \int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\cot x + C \quad \int \operatorname{cosec} x dx = \ln |\operatorname{cosec} x - \cot x| + C$$

$\downarrow$
 $-\ln (\operatorname{cosec} x + \cot x) + C$

$$\boxed{5} \int \sec x \cdot \tan x dx = \sec x + C$$

$$\boxed{6} \int \operatorname{cosec} x \cdot \cot x dx = -\operatorname{cosec} x + C$$

$$\boxed{7} \int \tan x dx \begin{cases} \text{or } -\ln(\cos) + C \\ \ln(\sec x) + C \end{cases} \quad \int \tan^2 x dx = \tan x - x + C$$

$$\boxed{8} \int \cot x dx = \ln |\sin x| + C \quad \int \cot^2 x dx = -\cot x - x + C$$

$$\star \int \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right) + C \quad \star \int \sin x \cos x = \frac{\sin^2 x}{2} + C$$

$$\star \int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{\sin 2x}{2} \right) + C$$

$$\textcircled{1} \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \textcircled{4} \sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x \quad \star \text{علاقات هامة :-}$$

$$\textcircled{2} \sec^2 x - \tan^2 x = 1$$

$$\textcircled{5} \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\textcircled{3} \operatorname{cosec}^2 x - \cot^2 x = 1$$

$$= 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\boxed{1} \int \sin A \cdot \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A-B) + \sin(A+B)]$$

$$\boxed{2} \int \cos A \cdot \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A-B) + \cos(A+B)]$$

$$\boxed{3} \int \sin A \cdot \sin B = \frac{1}{2} [\cos(A-B) - \cos(A+B)]$$

* طرق التكامل

* طالما الزاوية مش x ، يبقى تعويض

1 جبري

Ex: $\int \frac{\sec \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ $\Rightarrow$ 1 Let $u = \sqrt{x}$

2 $du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \rightarrow$ 2 $du = \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

3 $I = 2 \int \sec(u) du = 2 \ln |\sec u + \tan u| + C$

4 $I = 2 \ln |\sec \sqrt{x} + \tan \sqrt{x}| + C$

1 $u = \sqrt{x}$

2 بنوفس تعويض جبري عن u

2 تعويض مثلث

1 $\sqrt{a^2 - x^2}$ or $a^2 - x^2 \Rightarrow$ Let $x = a \sin \theta$, $dx = a \cos \theta d\theta$

2 $\sqrt{x^2 - a^2}$ or $x^2 - a^2 \Rightarrow$ Let $x = a \sec \theta$, $dx = a \sec \theta \tan \theta d\theta$

3 $\sqrt{a^2 + x^2}$ or $a^2 + x^2 \Rightarrow$ Let $x = a \tan \theta$, $dx = a \sec^2 \theta d\theta$

Ex: $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} \rightarrow$ Let $x = 2 \sin \theta \Rightarrow dx = 2 \cos \theta d\theta$

$I = \int \frac{2 \cos \theta d\theta}{\sqrt{4-4 \sin^2 \theta}} = \int \frac{2 \cos \theta}{2 \cos \theta} d\theta = \int d\theta = \theta + C$

$x = 2 \sin \theta \rightarrow \theta = \sin^{-1}(\frac{x}{2})$

$\therefore I = \sin^{-1} \frac{x}{2} + C$

~~$\sqrt{4-x^2}$~~ ~~$\sqrt{4-x^2}$~~ ~~$\sqrt{4-x^2}$~~ ~~$\sqrt{4-x^2}$~~

3 الكسور الجزئية

هو خارج قسمت كسرين حدين

الكسور

كسر فعلي «حقيق»

درجة البسط أقل من درجة المقام

كسر غير فعلي «غير حقيق»

درجة البسط أكبر أو يساوي المقام

* الكسور الجزئية هي عكس عملية توحيد المقام، شروط تحويل الكسور الجزئية

1 أن يكون الكسر فعلي حقيق

2 المقام يحل «إذا كان قابل للتحليل» ولو غير قابل بنعمل قسمته مطولته

* حالات التكامل الجزئي - «يتكون على حسب ناتج تحليل المقام»

١ الحالة الأولى

$$\star \frac{f(x)}{(x-a)(x+a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a} + \frac{C}{x-b}$$

٢ الحالة الثانية

$$\star \frac{f(x)}{(x-a)^n} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \dots + \frac{\text{ثابت}}{(x-a)^n}$$

٣ التكامل بالتجزئة

← يستخدم لما يتكون دالتين مألوفتين علاقة ببعض مألوفتين في بعض
عند حالتين :-

١ دالة أسية أو مثلثية
 $\tan \theta$
 $\tan^2 \theta$
 e^x

ex: $\int x e^x dx \rightarrow u = x \quad dv = e^x dx$
 $\text{ثبات} \quad du = dx \quad \text{كامل} \quad v = e^x$
 $I = x e^x - \int e^x dx$
 $I = x e^x - e^x + C$

٢ دالة مثلثية عكسية أو لوغاريتمية

ex: $\int x \tan^{-1} x dx \rightarrow u = \tan^{-1} x \quad dv = x dx$
 $\text{ثبات} \quad du = \frac{1}{1+x^2} dx \quad \text{كامل} \quad v = \frac{1}{2} x^2$
 $I = \frac{1}{2} x^2 \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx$

جزء ونقص
عشان نفوت كامل

$$I = \frac{1}{2} x^2 \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 - 1 + 1}{1+x^2} = \frac{1}{2} x^2 \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \left[\int dx - \int \frac{1}{1+x^2} dx \right]$$

$$\therefore I = \frac{1}{2} x^2 \tan^{-1} x - \frac{1}{2} [x - \tan^{-1} x] + C$$

Notes

$$\bullet \int \cos(ax) dx = \frac{1}{a} \sin ax + c \quad / \quad \int \sin(ax) dx = -\frac{\cos ax}{a} + c$$

$$\bullet \int \cos[f(x)] \cdot f'(x) dx = \sin f(x) + c$$

$$\bullet \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}(x) + c \quad \text{or} \quad \cos^{-1}(x) + c$$

$$\bullet \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c \quad \text{or} \quad \cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$\bullet \int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}(x) + c \quad \text{or} \quad -\cot^{-1}(x) + c$$

$$\bullet \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c \quad \text{or} \quad \frac{1}{a} \cot^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$\bullet \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1}(x) + c \quad \text{or} \quad -\operatorname{cosec}^{-1}(x) + c$$

$$\bullet \int \frac{dx}{a\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c \quad \text{or} \quad \frac{1}{a} \operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

الجبر

★ Complex numbers ★

$$x^2 + 1 = 0 \rightarrow x^2 = -1 \rightarrow x = \pm \sqrt{-1} \rightarrow i = \sqrt{-1} \rightarrow i^2 = -1$$

عدد مركب $z = x + iy$ $\rightarrow$ ex. $z = 5 - 3i$

جزء حقيقي x $\rightarrow$ 5
جزء تخيلي y $\rightarrow$ -3

مرافق العدد
المركب

$$z = x - iy$$

★ العمليات الأساسية (الجبرية) للعددين المركبتين :-

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

1 الجمع $\leftarrow$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2)$$

2 الضرب $\leftarrow$

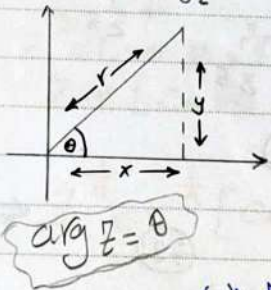
★ ضرب العدد المركب في المرافق $\leftarrow$ هيديك رقم حقيقي

$$\rightarrow z \cdot \bar{z} = (5 + 4i)(5 - 4i) = 25 + 20i - 20i - 12i^2 = 25 + 12 = 41$$

$i^2 = -1$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \times \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2}$$

3 القسمة $\leftarrow$ في القسمة نضرب في مرافق المقام



المقياس $r^2 = x^2 + y^2 \rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\Rightarrow r = |z|$$

$$z = r[\cos\theta + i\sin\theta]$$

$$(z = re^{i\theta})$$

صيغة أويلر $\leftarrow$

★ النكاح
من الزوايا

★ مجموع جذور أي عدد مركب = صفر

$$\star z \cdot \bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$$

$$\textcircled{1} \cos 6\theta + i \sin 6\theta = [\cos \theta + i \sin \theta]^6$$

$$(\cos \theta)^6 + C_1^6 (\cos \theta)^5 i \sin \theta + C_2^6 (\cos \theta)^4 (i \sin \theta)^2 + C_3^6 (\cos \theta)^3 (i \sin \theta)^3$$

$$+ C_4^6 (\cos \theta)^2 (i \sin \theta)^4 + C_5^6 (\cos \theta) (i \sin \theta)^5 + (i \sin \theta)^6$$

$$= (\cos \theta)^6 + 6 \cos^5 \theta \cdot i \sin \theta + 15 \cos^4 \theta \cdot (i \sin \theta)^2 + 20 \cos^3 \theta \cdot (i \sin \theta)^3$$

$$+ 15 (\cos \theta)^2 (i \sin \theta)^4 + 6 (\cos \theta) (i \sin \theta)^5 + (i \sin \theta)^6$$

$$= \cos^6 \theta + 6i \cos^5 \theta \sin \theta - 15 \cos^4 \theta \cdot \sin^2 \theta - 20i \cos^3 \theta \sin^3 \theta$$

$$+ 15 \cos^2 \theta \sin^4 \theta + 6i \cos \theta \sin^5 \theta - \sin^6 \theta$$

$$\cos 6\theta = \cos^6 \theta - 15 \cos^4 \theta \sin^2 \theta + 15 \cos^2 \theta \sin^4 \theta - \sin^6 \theta$$

$$\sin 6\theta = 6 \cos^5 \theta \sin \theta - 20 \cos^3 \theta \sin^3 \theta + 6 \cos \theta \sin^5 \theta$$

$$\textcircled{2} \cos^5 \theta$$

$$2 \cos \theta = z + \frac{1}{z} \rightarrow 32 \cos^5 \theta = \left(z + \frac{1}{z}\right)^5$$

$$\therefore 32 \cos^5 \theta = z^5 + C_1^5 z^4 \cdot \frac{1}{z} + C_2^5 z^3 \cdot \frac{1}{z^2} + C_3^5 z^2 \cdot \frac{1}{z^3} + C_4^5 z \cdot \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^5}$$

$$= 32 \cos^5 \theta = z^5 + 5 z^3 + 10 z + 10 \frac{1}{z} + 5 \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^5}$$

$$= \left(z^5 + \frac{1}{z^5}\right) + 5\left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right) + 10\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

$$\therefore 32 \cos^5 \theta = 2 \cos 5\theta + 10 \cos 3\theta + 20 \cos \theta \quad (\div 2)$$

$$16 \cos^5 \theta = \cos 5\theta + 5 \cos 3\theta + 10 \cos \theta$$

$$[8(-1)] \xrightarrow{\frac{1}{3} \text{ انكسار}} 8^{\frac{1}{3}}(-1)^{\frac{1}{3}}$$

$$z = 2 \left[\cos \pi + i \sin \pi \right]^{\frac{1}{3}} = 2 \left[\cos \frac{\pi + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{3} \right]$$

$$\text{at } k=0 \rightarrow z_1 = 2 \left[\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right] = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{at } k=1 \rightarrow z_2 = 2 \left[\cos \frac{\pi + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2\pi}{3} \right] = 2 [\cos \pi + i \sin \pi] = -1$$

$$\text{at } k=2 \rightarrow z_3 = 2 \left[\cos \frac{\pi + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 4\pi}{3} \right] = 2 \left[\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right] = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

★ نظريته دي موافق

$$[\cos \theta + i \sin \theta]^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

★ نظريته ذات الحديث

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \rightarrow x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

③ الان

→ 3 Shift ÷ 0 = 1 C_0^n or $C_n^n \rightarrow 1$

1. اوجد مفكوك $\sin n\theta$, $\cos n\theta$ ← بنستخدم ① دي موافق ② ذات الصير

2. ايجاد قوى $\cos \theta$, $\sin \theta$ بدلات مضاعفات الزاوية

Let $z = \cos \theta + i \sin \theta$, $\frac{1}{z} = \cos \theta - i \sin \theta$

$$z + \frac{1}{z} = 2 \cos \theta$$

$$z - \frac{1}{z} = 2i \sin \theta$$

→ $z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos n\theta$ $z^n - \frac{1}{z^n} = 2i \sin n\theta$

3. ايجاد جذور العدد المركب جذور $z^3 = 1 \rightarrow z = \sqrt[3]{1} \rightarrow z = (1)^{\frac{1}{3}}$

$z = r[\cos \theta + i \sin \theta] \rightarrow z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}[\cos \theta + i \sin \theta]^{\frac{1}{n}}$

ينوز على الزاوية $2\pi K$ ونطبق دي موافق

$$\Rightarrow z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{(\theta + 2\pi K)}{n} + i \sin \frac{(\theta + 2\pi K)}{n} \right]$$

(حفظ)

بعض الصور المثلثية للعدد المركب

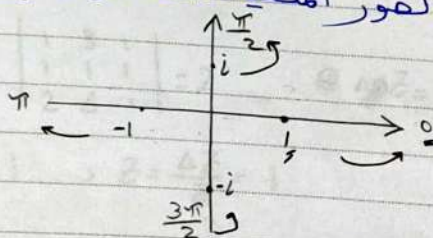
$K \rightarrow 0$
 $\downarrow$
 $K = (n-1)$

$$① = \cos 0 + i \sin 0$$

$$② = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$$

$$③ = \cos \pi + i \sin \pi$$

$$④ = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}$$



★ $z^{(5)} = 1 \rightarrow$ عدد الجذور للمعادلة

★ المحددات ★ ← ترتيب الأعداد على هيئة صفوف وأعمدة

← عدد الصفوف = عدد الأعمدة

★ أنواع المحددات

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1, 2 \times 2, \text{محدد ثنائي}$$

Ex. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix} \rightarrow 1 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -16$ (محدد ثلاثي 3x3)

القياس بالصفوف

① $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -7$

★ خواص المحددات

② $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -7$ $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 7$ (يمكن لا تتغير الإشارة عند الاستبدال مرتين)
تتغير الإشارة عند استبدال صفين أو عمودين

③ $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 4 & 16 & 6 \end{vmatrix} = 0$ (صفوف متطابقة)

④ $3 \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 15 & 12 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ العدد يُضرب في أحد الصفوف أو الأعمدة

يمكن العكس بأخذ عامل مشترك "3"

★ حل المعادلات الخطية باستخدام المحددات «الكرامر» ★

Ex. $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y+z=1 \\ 2x+3y+z=6 \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2$ $\Delta x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2$
 $\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 2$ $\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 2$

$\therefore x = \frac{\Delta x}{\Delta} = 1$, $y = \frac{\Delta y}{\Delta} = 1$, $z = \frac{\Delta z}{\Delta} = 1$

★ المصفوفات ← هي ترتيب الأعداد لمصفوف وأعمدة
 ← عدد المصفوف ليس بالضرورة يساوي الأعمدة

★ $a_{2 \times 3}$ ← المصفوفة
 ← الصف 2
 ← العمود 3

★ $A_{2 \times 3}$ ← أبعاد المصفوفة
 ← عدد الصفوف 2
 ← عدد الأعمدة 3

★ أنواع المصفوفات

[1] مصفوفة الصف $A = [3 \ 6 \ 4]_{1 \times 3}$

[2] مصفوفة العمود $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}_{2 \times 1}$

[3] مصفوفة النمر $A = [2]_{1 \times 1}$

[4] المصفوفة المربعة ← عدد الصفوف = عدد الأعمدة

[5] المصفوفة المربعة ← كلها أصفار

[6] مصفوفة الوحدة ← القطر الرئيسي واحد وكل الباقي أصفار
 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$

★ جمع مصفوفات ←
 "لازم يكون نفس النوع"
 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

★ ضرب مصفوفة
 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$
 $2 \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$

خلو بالك الضرب في مصفوفة
 بنضرب في جميع العناصر، بس الضرب
 في محدد يكون ضرب في عمود
 واحد أو صف واحد فقط

★ ضرب مصفوفتين

لازم عدد الأعمدة
 للثاني = عدد صفوف
 الأولى
 $A \cdot B = C$
 $m \times n \quad n \times l \quad m \times l$

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}_{3 \times 1} \rightarrow A \cdot B = C_{2 \times 1}$

$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 3 + 1 \times 1 + 0 \times 2 \\ 1 \times 3 + 4 \times 1 + 2 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \end{bmatrix}_{2 \times 1}$

$A \cdot B \neq B \cdot A$

$B^2 = B \cdot B$
 ضرب مصفوفتين

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

2×3 3×2

* مصفوفة المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{متماثلة}} A = A^T$$

* المصفوفة المتماثلة

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow A = -A^T \quad \bullet \quad A^T = -A$$

* المصفوفة شبيهة المتماثلة

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj}(A) \quad \text{or} \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot F^T$$

$\downarrow$ $\downarrow$
مصفوفة المرافقة مصفوفة المرافقة

حاصل ضرب مصفوفة في معكوسها
النتيجة مصفوفة الوحدة

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

شروط إيجاد المعكوس:

① أن تكون مصفوفة مربعة

$$|A| \neq 0$$

② معكوس مصفوفة « 2×2 »

$$\text{Ex. } A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{1} |A| = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 6 = -7 \neq 0 \quad \checkmark$$

$$\textcircled{2} \text{adj } A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow \text{adj } A = F^T = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{-1}{-7} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{ممكن تبسيط}} \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

$$\text{Ex. } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

② معكوس مصفوفة « 3×3 »

$$\textcircled{1} |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 3 + 6 = 3 \quad |A| \neq 0 \quad \checkmark$$

مصفوفة المرافقة

$$\textcircled{2} F = \begin{bmatrix} (+) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & (-) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & (+) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ (-) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & (+) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & (-) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ (+) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & (-) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & (+) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore f^T(\text{adj}(A)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

« حل المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات »

→ Solve the system $\Rightarrow X + Y + Z = 6$

$$2Y + 5Z = -4$$

$$2X + 5Y - Z = 27$$

معادلات x y z

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ 27 \end{bmatrix}$$

$$\therefore |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -21 \neq 0 \checkmark$$

$$\therefore f \begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 & 10 & -4 \\ 6 & -3 & -3 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} -27 & 6 & 3 \\ 10 & -3 & -5 \\ -4 & -3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{-1}{21} \begin{bmatrix} -27 & 6 & 3 \\ 10 & -3 & -5 \\ -4 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ 27 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \frac{-1}{21} \begin{bmatrix} -27 & 6 & 3 \\ 10 & -3 & -5 \\ -4 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ 27 \end{bmatrix}$$

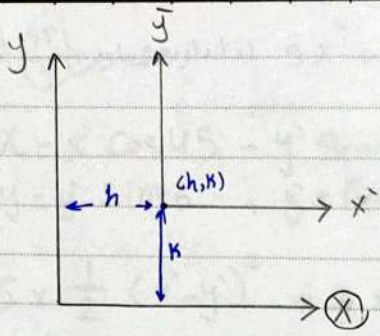
نضرب
مصفوفتين

$$= \frac{-1}{21} \begin{bmatrix} (-27 \times 6) + (6 \times -4) + (3 \times 27) \\ (10 \times 6) + (-3 \times -4) + (-5 \times 27) \\ (-4 \times 6) + (-3 \times -4) + (2 \times 27) \end{bmatrix} = \frac{-1}{21} \begin{bmatrix} -105 \\ -63 \\ 42 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \rightarrow (X=5, Y=3, Z=-2)$$

الهندسة

1 نقل المحاور



$$\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases}$$

إذا نقلت نقطة الأصل إلى النقطة (1, 3) $\begin{cases} h=1 \\ k=3 \end{cases}$
 $(x = x' + 1, y = y' + 3)$

المعادلات العامة $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2fx + 2gy + c = 0$

مطلق $\uparrow$ حدود درجته أولى $\downarrow$ حدود من الدرجة الثانية

للم عند نقل المحاور :-
 ① حدود الدرجة الثانية لا تتغير
 ② حدود الدرجة الأولى والعند المطلق يتغير

* عند نقل المحاور لنقطة معينة يتم حذف معاملات الدرجة الأولى

لكن من شرطه يمكن أن لا

Ex. إذا نقلت النقطة (-1, -2) $(x^2 + y^2 + 2x + 4y + 5 = 0)$ إلى الصورة الجديدة للمعادلة $(x'^2 + y'^2 = 0)$

$$x = x' - 1, y = y' - 2$$

$$(x' - 1)^2 + (y' - 2)^2 + 2(x' - 1) + 4(y' - 2) + 5 = 0$$

$$x'^2 - 2x' + 1 + y'^2 - 4y' + 4 + 2x' - 2 + 4y' - 8 + 5 = 0$$

$$x'^2 + y'^2 + 10 - 10 = 0 \rightarrow (x'^2 + y'^2 = 0)$$

المعادلة الجديدة

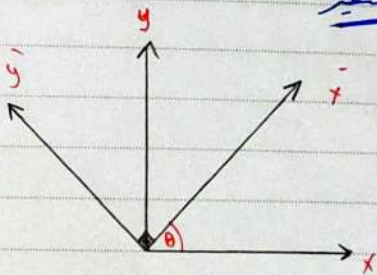
حدود الدرجة الثانية لا تتغير

النقل يؤثر في حدود

الدرجة الأولى والعند

المطلق ولا يؤثر في حدود

الدرجة الثانية



الدوران	x'	y'
x	$\cos \theta$	$-\sin \theta$
y	$\sin \theta$	$\cos \theta$

2 دوران المحاور

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$$

$\theta = 45^\circ$

Ex) $\left(\frac{\pi}{4}\right)$ إذا دارت المحاور بزاوية 45° ، اوجد الصورة الجديدة للمعادلة $5x^2 + 2xy + 5y^2 = 2$

$$x = x' \cos 45 - y' \sin 45 = \frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}} \rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} (x' - y')$$

$$y = y' \sin 45 + y' \cos 45 = \frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}} \rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{2}} (x' + y')$$

بنعوض
في
المعادلة

$$5 \times \frac{1}{2} (x' - y')^2 + 2 \times \frac{1}{2} (x' - y')(x' + y') + 5 \times \frac{1}{2} (x' + y')^2 = 2$$

$$\frac{5}{2} (x'^2 - 2x'y' + y'^2) + x'^2 - y'^2 + \frac{5}{2} (x'^2 + 2x'y' + y'^2) = 2$$

$\times 2$

$$5(x'^2 - 2x'y' + y'^2) + 2(x'^2 - y'^2) + 5(x'^2 + 2x'y' + y'^2) = 4$$

$$12x'^2 + 8y'^2 = 4 \quad (\div 4) \rightarrow 3x'^2 + 2y'^2 = 1$$

المعادلة العامة

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2fx + 2gy + c = 0$$

* لحذف معامل xy لازم المحاور تدور بزاوية θ

$$\tan 2\theta = \frac{2h}{a-b}$$

$$\text{or } \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2h}{a-b} \right)$$

$$\text{or } \Rightarrow 2\theta = \tan^{-1} \left(\frac{2h}{a-b} \right)$$

قطع مكافئ $\rightarrow x^2 + y = 1$

قطع ناقص $\rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

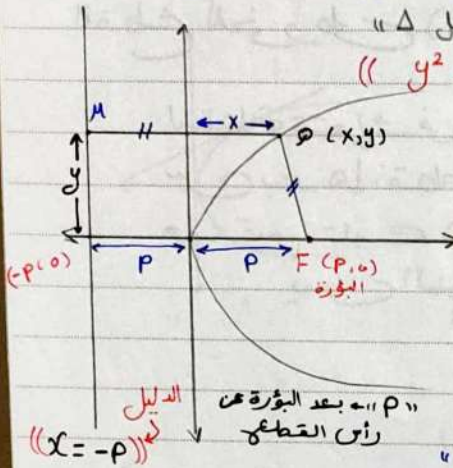
دائرة $\rightarrow x^2 + y^2 = 1$

☆ القطعائات المخروطية ☆

□ القطع المكافئ : نقاط تتحرك في المستوى بحيث يكون بُعدها عن نقطة ثابتة «البؤرة F» مساوية لبُعدها عن مستقيم ثابت «الدليل Δ»

☆ معادلة القطع : $(y^2 = 4px)$

بماضبات معادلة القطع المكافئ :



$$MF = MH$$

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = x + p$$

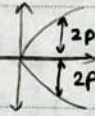
$$(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2$$

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$$

$$y^2 = 2px + 2px \rightarrow y^2 = 4px$$

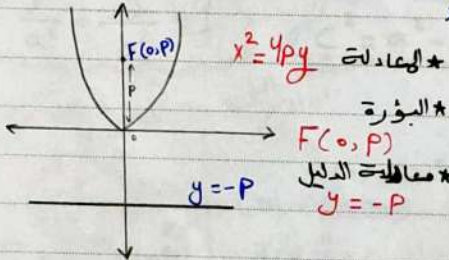
بترتيب الطرفين

☆ $4p$ ☆



☆ طول الوتر البؤري للعمودي ☆

☆ الرأس (0, 0) ☆



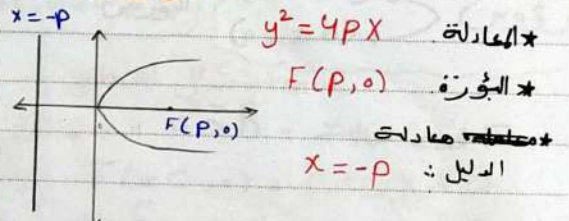
☆ المعادلة $x^2 = 4py$

☆ البؤرة

$F(0, p)$

☆ معادلة الدليل

$y = -p$



☆ المعادلة $y^2 = 4px$

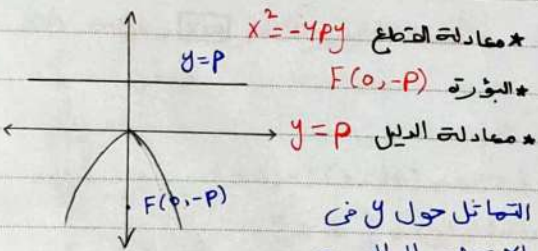
☆ البؤرة $F(p, 0)$

☆ معادلة الدليل

$x = -p$

التماثل حول y من الاتجاه الموجب

التماثل حول x من الاتجاه الموجب



☆ معادلة القطع $x^2 = -4py$

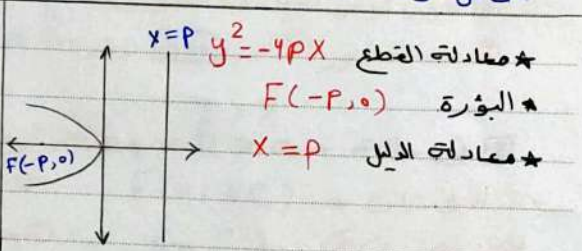
☆ البؤرة $F(0, -p)$

☆ معادلة الدليل

$y = p$

التماثل حول y في

الاتجاه السالب



☆ معادلة القطع $y^2 = -4px$

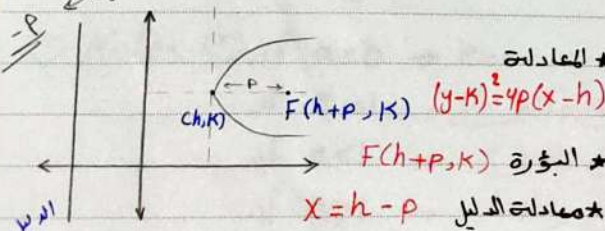
☆ البؤرة $F(-p, 0)$

☆ معادلة الدليل

$x = p$

التماثل حول x في الاتجاه السالب

التماثل حول محور x من الاتجاه الموجب → ☆ الرأس (h, k) ☆ ← التماثل حول محور y من الاتجاه السالب



☆ المعادلة

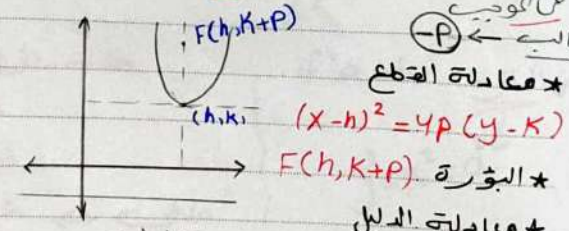
$(y-k)^2 = 4p(x-h)$

☆ البؤرة $F(h+p, k)$

☆ معادلة الدليل

$x = h - p$

الدليل محور القاع $(y = h + p)$



☆ معادلة القطع

$(x-h)^2 = 4p(y-k)$

☆ البؤرة $F(h, k+p)$

☆ معادلة الدليل

$y = k - p$

معدلة محور

التماثل

$x = h + p$

القطع المخروطي (جميع القطاعات) : المحل الهندسي

لنقطة تتحرك في المستوى بحيث يكون النسبة
بين بعدها نقطة ثابتة (البؤرة) إلى بعدها عن
مستقيم ثابت (الدليل) يساوي مقدار ثابت
يسمى البعد في المركز (e)

★ الحالة العامة : المركز (h, k)

1 في حالة $a > b$

$$X = x - h, \quad y = y - k$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

① البؤرتان $(\pm c + h, k)$ ② الرؤوس $(h, \pm b + k)$

③ معادلات المحور الأكبر $y = k$ وطوله $2a$

④ معادلات المحور الأصغر $x = h$ وطوله $2b$

⑤ معادلات الدليلين $x = \pm \frac{a}{e} + h$ ⑥ الاختلاف المركزي $e = \frac{c}{a}$

$$\star \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \star$$

2 في حالة $b > a$

① البؤرتان $(h, \pm c + k)$ ② الرؤوس $(h, \pm b + k)$

③ معادلات المحور الأكبر $x = h$ وطوله $2b$

④ معادلات المحور الأصغر $y = k$ وطوله $2a$

⑤ معادلات الدليلين $y = \pm \frac{b}{e} + k$ ⑥ الاختلاف المركزي $e = \frac{c}{b}$